Cap 5 PyE

# TEST DE HIPÓTESIS

① Dados los sig. pares de aseveraciones, indicar cuál/es no cumple/n con las reglas para establecer hipótesis acerca del valor de la media poblacional $\mu$ en una prueba basada en una m.a.s $\{X_1, X_2 \dots X_n\}$. Justificar respuesta.

a) $H_0: \mu = 100$ vs $H_1: \mu = 200$ ✓

b) $H_0: \mu = 100$ vs $H_1: \mu < 100$ ✓

c) $H_0: \mu = 100$ vs $H_1: \mu \neq 100$ ✓

d) $H_0: \mu < 100$ vs $H_1: \mu \geq 100$ ⊗ no cumple. Ho no incluye el "="

e) $H_0: \mu \leq 100$ vs $H_1: \mu > 100$

f) $H_0: \mu \neq 100$ vs $H_1: \mu = 100$ ⊗ no cumple. Ho no incluye el "="

g) $H_0: \bar{X} = 100$ vs $H_1: \bar{X} > 100$ ⊗ no cumple (es otro estimador)

Asociar los sig. enunciados con las hipótesis que le correspondan:

a) Para determinar si las soldaduras efectuadas en una planta de energía nuclear cumplen con las especificaciones, se selecciona una muestra al azar de soldaduras y se realizan pruebas en cada soldadura de la muestra. La resistencia de la soldadura se mide como la fuerza requerida para romper la soldadura. Supongamos que en las especificaciones se establece que la resistencia media de soldaduras debe rebasar 100 lb/pulg$^2$

e) $H_1: \mu > 100$ ✓

b) Interesa controlar si una balanza está correctamente calibrada, para ello se pesará una pesa patrón de 100 kg., 20 veces..

c) $H_0: \mu = 100$ vs $H_1: \mu \neq 100$ ✓

c) Se conduce una investigación para estudiar si el nivel de ventas promedio de una sucursal por día es inferior a 100 unidades

b) $H_0: \mu = 100$ vs $H_1: \mu < 100$ ✓

d) ¿Qué significaría error tipo I en a)?

(I) Rechazar Ho cuando Ho es verdadera $\rightarrow \mu = 100$

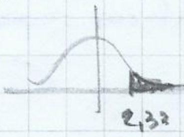
e) ¿Qué implicaría el error de tipo II en b)?

(II) Aceptar Ho cuando Ho es falsa $\rightarrow \mu \neq 100$

② El estadístico de contraste de un ensayo de hipótesis, $z$, tiene distribución Normal estándar. Indicar para cada una de las regiones de rechazo, las hipótesis correspondientes y el nivel de significación considerado

Nivel de significación = $\alpha$

a) $\{Z \geq 2{,}33\}$

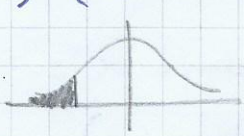



$P(Z \geq 2{,}33) = 1 - P(Z < 2{,}33) \overset{\text{x continuidad}}{=} 1 - P(Z \leq 2{,}33) = 1 - 0{,}9901 = \underbrace{0{,}01}_{\alpha}$

$\boxed{\alpha = 0{,}01} \rightarrow \mu = \mu_0$

$\boxed{H_0 : \mu = \mu_0 \quad vs \quad H_1 : \mu > \mu_0}$

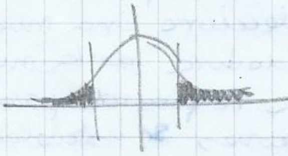
b) $\{Z \leq -2{,}58\}$



$P(Z \leq -2{,}58) = 0{,}0049 \rightarrow \boxed{\alpha = 0{,}005}$

$\boxed{H_0 : \mu = \mu_0 \quad vs \quad H_1 : \mu < \mu_0}$

c) $\{Z \geq 1{,}96 \lor Z \leq -1{,}96\}$



$P(Z \geq 1{,}96 \lor Z \leq -1{,}96) = P(Z \geq 1{,}96) + P(Z \leq -1{,}96) =$

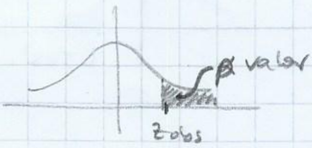
$\overset{\text{cont.}}{=} 1 - P(Z \leq 1{,}96) + P(Z \leq -1{,}96) = 1 - 0{,}975 + 0{,}025 =$

$= 0{,}05 \rightarrow \boxed{\alpha = 0{,}05}$

$\boxed{H_0 : \mu = \mu_0 \quad vs \quad H_1 : \mu \neq \mu_0}$

③ Para cada uno de los sig. pares de hipótesis, considerando una prueba cuyo estadístico de contraste tenga distribución normal estándar para los valores observados en cada caso, indicar el valor p de la prueba.

a) $H_0: \mu = 10$ vs $H_1: \mu > 10$, $Z_{obs} = 2{,}5$



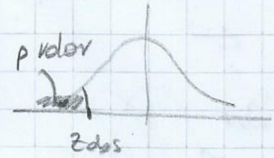

$H_1: \mu > 10 \rightarrow$ derecha

$Z_{obs} = 2{,}5 \rightarrow$ p valor $= P(Z > 2{,}50) = 1 - P(Z \leq 2{,}5) =$

$= 1 - 0{,}99379 = \boxed{0{,}0062 = \text{p-valor}}$ ✓

b) $H_0: \mu = 12$ vs $H_2: \mu < 12$, $z_{obs} = -1{,}2$

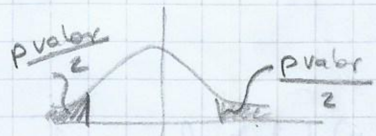
↑ a izq.




p valor $= P(Z \leq Z_{obs}) = P(Z \leq -1{,}2) = 0{,}11507$

$\boxed{\text{p valor} = 0{,}1157}$ ✓

c) $H_0: \mu = 7$ vs $H_1: \mu \neq 7$, $Z_{obs} = 2{,}8$

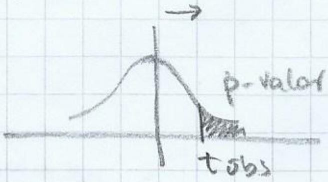



$\frac{\text{p valor}}{2} = P(Z < 2{,}8) = 1 - P(Z \leq 2{,}8) = 0{,}00256$

$\boxed{\text{p valor} = 0{,}0051}$ ✓

④ Dado el valor observado para una ~~prueba~~ basada en un estadístico t y sus grados de libertad (gl), aproximar el p valor y la conclusión de una prueba con nivel de significación $\alpha = 0{,}05$

a) unilateral derecha, con $gl = 8$, $t_{obs} = 2{,}84$

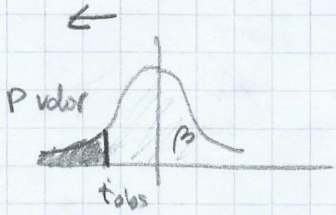



$t_{obs} = 2{,}84 \longrightarrow t_{8,\alpha} = 2{,}84 \rightarrow \alpha = 0{,}01$

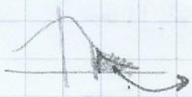
$\rightarrow \alpha = 0{,}01$

$\boxed{p \text{ valor} \cong 0{,}01}$ ✓

b) unilateral izquierda, con $gl = 10$, $t_{obs} = -2{,}5$




$t_{obs} = -2{,}5 \longrightarrow t_{10,\alpha} = -2{,}5 \longrightarrow$ lo "paso" a "derecha"

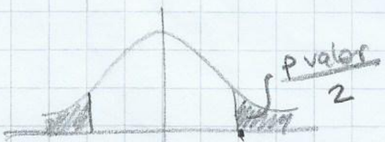


$t_{10,\alpha} = 2{,}5 \longrightarrow \alpha = 0{,}0175$ (aprox)

x simetría

$\boxed{p \text{ valor} \cong 0{,}0175}$ ✓

c) bilateral, con $gl = 15$, $t_{obs} = 1{,}95$




$t_{obs} = 1{,}95 \longrightarrow t_{15,\frac{\alpha}{2}} = 1{,}95 \rightarrow \frac{\alpha}{2} \cong 0{,}0375$

$\rightarrow \alpha = 0{,}075$

$\boxed{p \text{ valor} \cong 0{,}075}$ ✓

⑥ Una empresa estudia introducir un nuevo sistema de producción para mejorar su productividad media establecida actualmente en 42 unidades por persona y por día. Se estima que el cambio no será rentable si no consigue elevar dicho número por encima de 45 u. Realizada una prueba con la nueva tecnología, aplicada a 35 personas, se obtuvo una producción media de 46,5 y no se observó ningún cambio apreciable en la dispersión que estaba establecida en $\sigma = 3$ u por día.

Considerando esta información y utilizando un nivel de significación del 1% ¿se debería efectuar el cambio tecnológico?

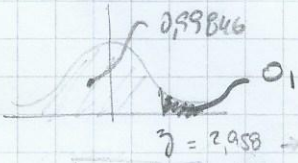
$n = 35$ $\quad \sigma = 3$ $\quad H_0: \mu \leq 45$ vs $H_1: \mu > 45$ $\quad \bar{X} = 46{,}5$

$z_{0{,}99} = 2{,}33$

$\alpha = 0{,}01$ $\quad$ Rechazo $H_0$ si $Z_{obs} > Z_{0{,}99}$

Población normal, varianza conocida → Estadístico de prueba: $\overbrace{\dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}}^{Z} \sim N(0,1)$

$$Z_{observado} = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{46{,}5 - 45}{\frac{3}{\sqrt{35}}} = 2{,}958$$




$\alpha_m = 0{,}0015 \in$ zona de rechazo de $H_0$ → $\boxed{\mu > 45}$

$\boxed{\text{El cambio de tecnología es propicio}}$

Nivel de significación $= P(\text{rechazar } H_0 \mid H_0 \text{ es verdadera}) = \alpha$

$$\left.\begin{array}{l} Z_{obs} = 2{,}958 \\ Z_{0{,}99} = 2{,}33 \end{array}\right\rangle Z_{obs} > Z_{0{,}99} \rightarrow \text{Rechazo } H_0$$

→ "Acepto $H_1$" → cambio tecnológico

Si $\underbrace{H_1 \ V}_{H_0 \ F}$ → cambio tecn.

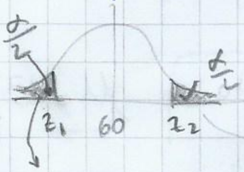
⑦ Se desea calibrar un fotómetro para medir la proporción de monóxido de carbono (CO) de un gas. Se toman 25 mediciones de una muestra patrón con 60 ppm de proporción de CO y sabiendo que los errores de medición tienen distribución normal con dispersión $\sigma = 0,5$ ppm.

Designando con $\mu$ al verdadero valor medio de la calibración del fotómetro:

a) ¿Qué hipótesis probaría?

$n = 25 \qquad \sigma = 0,5 \qquad \boxed{H_0: \mu = 60 \quad vs \quad H_1: \mu \neq 60}$

b) Si se rechaza la hipótesis de nulidad, para valores de $\bar{x}$ superiores a 60,196 ppm o inferiores a 59,804 ppm, ¿cuál es la probabilidad de que la recalibración se realice sin ser necesaria?




← Zona de rechazo → $\Rightarrow |Z_{obs}| > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ , $e_m = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \Rightarrow Z_{obs} = \dfrac{\bar{X} - 60}{\frac{0,5}{5}}$

(pobl. Normal, $\sigma$ conocido)

$Z_{obs_1} = \dfrac{59,804 - 60}{0,1} = -1,96 \qquad Z_{obs_2} = \dfrac{60,196 - 60}{0,1} = 1,96$

$P(Z_1 \leq -1,96) = 0,025 = \frac{\alpha}{2} \qquad P(Z_2 > 1,96) = 0,025 = \frac{\alpha}{2}$

$\boxed{\alpha = 0,05}$

Rechazo Ho si: $\left|\dfrac{\bar{X} - 60}{0,10}\right| > z_{0,975}$

c) ¿cuál es la probabilidad de no recalibrar si el fotómetro mide 60,3 ppm?

Recalibro con $\mu \neq 60$ → No recalibro → $\mu = 60$

$P(\text{No rechazar Ho} \mid \overbrace{\mu = 60,3}^{\mu \neq 60}) = P(\text{Aceptar Ho} \mid \text{Ho falsa}) = \text{II}$ (error tipo)

$= P(|Z_{obs}| \leq 1,96 \mid \mu = 60,3) = P(-1,96 \leq \overbrace{\dfrac{\bar{X} - 60}{0,1}}^{Z_{obs}} \leq 1,96 \mid \mu = 60,3) =$

$= P(-1,96 \leq \dfrac{\overbrace{\bar{X} - 60,3 + 0,3}^{\bar{X} - 60}}{0,1} \leq 1,96 \mid \mu = 60,3) = P(-1,96 \leq \overbrace{\dfrac{\bar{X} - 60,3}{0,1}}^{\sim N(0,1)} + \dfrac{0,3}{0,1} \leq 1,96) =$

$= P(-1,96 - 3 \leq Z \leq 1,96 - 3) = P(-4,96 \leq Z \leq -1,04) = 0,1492$

$\boxed{P(\text{no recalibrar} \mid \mu = 60,3) = 0,1492}$ ✓

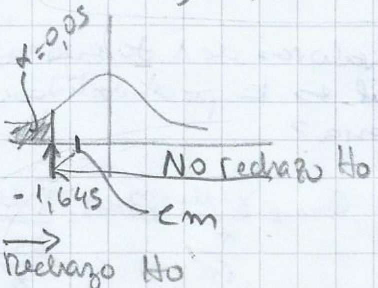
⑧ Un fabricante sostiene que el modelo de auto A tiene un rendimiento promedio menor a 13 km/litro de nafta. Se selecciona una muestra de 9 de estos vehículos y cada uno es conducido con un litro de nafta en las mismas condiciones. La muestra proporciona una media de 12,34 km/l. Se sabe que la distribución de la cantidad de km recorridos por litro de nafta es Normal con un desvío estándar de 1,26 km/l.

a) Plantear las hipótesis a contrastar, el estadístico del test con su distribución y la decisión tomada a nivel 0,05

$\sigma = 1,26 \qquad \bar{X} = 12,34 \qquad n = 9$ distribuc. Normal $\Rightarrow e_m = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

$H_0: \mu \geq 13$ vs $H_1: \mu < 13 \qquad e_m \sim N(0,1)$

$\alpha = 0,05$




$Z_{m\ \text{observado}} = \dfrac{12,34 - 13}{\frac{1,26}{\sqrt{9}}} = -1,5714$

$Z_{\alpha = 0,05} \rightarrow \alpha = -1,645$

$\boxed{Z_{obs} > Z_\alpha \rightarrow \text{No rechazo Ho}}$ $\qquad \mu = 13$

Región de rechazo: Rechazo Ho si $e_{m\,obs} < -1,645$

b) El test elegido ¿es de nivel exacto o aproximado? Justificar

Es exacto pues tiene distribución Normal exacta

c) ¿Cuál es la prob. de decidir que se cumple la hipótesis del fabricante, cuando el verdadero rendimiento medio del modelo del auto A es de 12 km/l?

$\mu_{\text{verdadero}} = 12 \rightarrow$ Ho es falsa $\qquad \dfrac{\bar{X} - 12}{\frac{1,26}{3}} \sim N(0,1)$

$P(\text{rechazar Ho cuando } \overset{\mu = 12}{\text{Ho es falsa}}) = P(\text{rechazar Ho} \mid \mu = 12)$

Rechazar Ho $\rightarrow Z < -1,645 \longrightarrow \dfrac{\bar{X} - 13}{\underbrace{1,26/3}_{0,42}} < -1,645$

$P(\text{rechazar Ho} \mid \mu = 12) = P\left(\dfrac{\bar{X} - 13}{0,42} < -1,645 \mid \mu = 12\right) =$

$= P\left(\dfrac{\bar{X} \overbrace{- 12 - 1}^{-13}}{0,42} < -1,645\right) = P\left(\underbrace{\dfrac{\bar{X} - 12}{0,42}}_{\sim N(0,1)} - \dfrac{1}{0,42} < -1,645\right) = P\left(Z < \overbrace{-1,645 + \dfrac{1}{0,42}}^{0,7359}\right) =$

continuidad

$= P(Z \leq 0,7359) = 0,7691$

$\boxed{P(\text{rechazar Ho} \mid \mu = 12) = 0,7691}$

(10) El coeficiente de compresión del cemento curado sigue una distribución Normal con una media de 50 $kg/cm^2$ (en cientos). Utilizar un cemento de menor coeficiente promedio podría ocasionar problemas en la construcción por lo que se requiere tener una probabilidad de 0.95 de descartar las partidas si el coeficiente de compresión promedio proviniera de una población con coeficientes de compresión promedio de 47 $kg/cm^2$ y una probabilidad de 0,01 de rechazar las partidas que cumplen con la especificación. Supongamos que el desvío de la población es 5 $kg/cm^2$

a) Plantear un test adecuado. Justificar las hipótesis elegidas

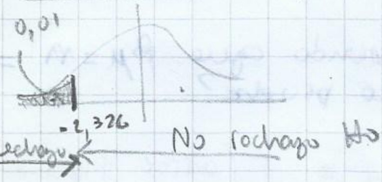
$\sigma = 5$ $\qquad \underbrace{H_0: \mu = 50}_{\text{acepto cemento}}$ vs $\underbrace{H_1: \mu < 50}_{\text{los descarto}}$ $\qquad Z_{obs} = \dfrac{\bar{X} - 50}{5/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

$P(\text{rechazar } H_0 \mid H_0 \text{ es falsa}_{\,\mu=47}) = 0,95 \rightarrow$ Potencia del test $= 1-\beta$

$1-\beta = 0,95 \rightarrow \boxed{\beta = 0,05}$

$P(\text{rechazo } H_0 \mid H_0 = V_{\,\mu=50}) = \boxed{\text{error tipo I} = \alpha = 0,01}$ $\qquad z_{0,01} = -2,326$

Rechazo $H_0$ si $Z_{obs} < Z_{0,01}$




b) Calcular el tamaño de la muestra necesario para que se cumplan los [illegible] requeridos y establecer la zona de rechazo y la regla de decisión

$\bar{X} = 47$

$$n = \frac{(Z_{1-\alpha} + Z_{1-\beta})^2 \sigma^2}{(\mu_0 - \mu_1)^2} = \frac{(Z_{0,99} + Z_{0,95})^2\, 5^2}{(50-47)^2} = \frac{(2,33 + 1,645)^2\, 25}{9} = 43,90$$

$$\boxed{n = 44}$$

$e_m = \dfrac{\bar{X} - 50}{5/\sqrt{44}} \sim N(0,1)$ bajo $H_0$ $\qquad$ Rechazo si $Z_{obs} < Z_{0,01}$

(11) Una compañía de productos para el consumidor está desarrollando un nuevo shampú y está interesada en la altura de la espuma (en mm). La altura de la espuma tiene una distribución aproximadamente normal. La compañía quiere verificar si la altura de la espuma supera los 180 mm y si considera una muestra de tamaño 24. Los valores observados son:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 122,72 | 182,53 | 156,03 | 200,31 | 219,86 | 187,20 | 213,00 | 133,47 |
| 203,39 | 207,56 | 212,64 | 132,57 | 204,95 | 181,51 | 184,27 | 194,70 |
| 184,46 | 169,48 | 207,28 | 186,65 | 195,85 | 181,26 | 181,78 | 211,32 |

a) Establecer las hipótesis correspondientes al test.

$n = 24$
Pobl. Normal
$\sigma$ desconocido

$H_0: \mu = 180$ vs $H_1: \mu > 180$

Rechazo $H_0$ si $T_{obs} > t_{n-1,\alpha} \rightarrow$ si $T_{obs} > t_{23,\alpha}$

b) Interpretar la salida del programa R. Concluir

data: muestra
t = 0,81221 df = 23 p-value = 0,2123
alt. hyp.: true mean is greater than 180
95 percent confidence interval:
175,2103 Inf.
sample estimates
mean of x 184,3288

$\bar{X} = 184,3288$

$\alpha = 1 - 0,95 = 0,05$

p valor $= 0,2123 > \alpha = 0,05 \rightarrow$ No se rechaza $H_0$

No existe evidencia empírica de que la altura mínima supere 180 mm

Test de Hip.

U.S

(13) Un capataz afirma que bajo su supervisión el armado de una pieza tiene una duración promedio inferior a 25 minutos y la dispersión de 2 minutos. El tiempo medio arrojado por una muestra de 25 obreros con este nuevo proceso resultó 23 minutos y el desvío estándar muestral es de 3,9 minutos si los tiempos se distribuyen en forma aprox. Normal.

a) Plantear un test de hipótesis si la media y la variabilidad del tiempo del armado de una pieza coinciden con la afirmación del capataz

$\mu = 25$, $\sigma = 2$ } s/ capataz

$n = 25$

$\bar{X} = 23$

$S = 3,9$

$$\boxed{H_0: \mu = 25 \quad \text{vs} \quad \underbrace{H_1: \mu < 25}_{\text{afirma el capataz}}}$$

$$T_{obs} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{X} - 25}{\frac{3,9}{\sqrt{25}}} = \boxed{\frac{\bar{X} - 25}{0,78} \sim t_{24} \text{ bajo } H_0}$$

$\boxed{\text{Rechazo } H_0 \text{ si } T_{obs} < t_{24,1-\alpha}}$ para $\mu$

$$\boxed{H_0: \underbrace{\sigma = 2}_{\text{dice el capataz}} \quad \text{vs} \quad H_1: \sigma \neq 2}$$

$$e_n = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{24 \times S^2}{2^2} = 6S^2 \sim \chi^2_{24} \text{ bajo } H_0$$

Rechazo si $\chi^2_{obs} > \chi^2_{24,\frac{\alpha}{2}}$ ó $\chi^2_{obs} < \chi^2_{24,1-\frac{\alpha}{2}}$

b) Concluir en función de los datos muestrales, considerando un nivel de significación del 5%

$\alpha = 0,05$

$$T_{obs} = \frac{23-25}{3,9/5} = -2,564$$

$$t_{24,095} = -1,711$$

$t_{obs} < t_{24,095}$ → $\boxed{\text{Rechazo } H_0}$ para $\mu$

$$\chi^2_{obs} = 6 \times 3,9^2 = 91,26$$

$\frac{\alpha}{2}$ $\quad \chi^2_{24,0,025} = 39,364$ → $\chi^2_{obs} > \chi^2_{24,\frac{\alpha}{2}}$ → $\boxed{\text{Rechazo } H_0 \text{ para } \sigma}$

$1-\frac{\alpha}{2}$ $\quad \chi^2_{24,0975} = 12,401$

(14) El fabricante de neumáticos Mirelli sostiene que en promedio sus productos tienen una duración superior a 50.000 Km antes de necesitar reemplazo. Un grupo de consumidores quiere ponerlo a prueba dicha afirmación. Para ello seleccionan una muestra de 50 neumáticos y resulta que en promedio duraron 50.300 km con una dispersión de 1000 km.

a) Definir con claridad cuál sería el parámetro de interés en esto problema

$\mu$ = "Valor verdadero de la duración media de los neumáticos Mirelli antes de ser reemplazados"

b) Establecer la hipótesis nula y la alternativa en términos de dicho parámetro

$n = 50$
$\bar{X} = 50300$
$S = 1000$

$H_0: \mu = 50000$ vs $\underbrace{H_1: \mu > 50000}_{\text{dice el fabricante}}$

$\underset{t_{obs}}{e_m} = \dfrac{\bar{X} - 50000}{1000/\sqrt{50}} \sim t_{49}$ Rechazo Ho si $\overset{t_{obs}}{e_m} > t_{49,\alpha}$ bajo Ho

c) Explicar el significado de los errores tipo I y II en el contexto de este problema

- Error tipo I = $P(\text{Rechazar Ho} \mid \text{Ho verdadera}) \overset{= 1-\alpha}{\rightarrow}$ Se tome como que $\mu$ $\underbrace{\text{es mayor que 50000}}_{\text{lo que afirma el fabricante}}$ cuando en realidad es 50000
- Error tipo II = $P(\text{Aceptar Ho} \mid \text{Ho es falsa}) = \beta \rightarrow$ tomar como que $\mu = 50000$ cuando en realidad no lo es $\rightarrow$ el fabricante estaba en lo correcto

d) Responder si la afirmación del fabricante es aceptable con un nivel de significación del 0,01

$\alpha = 0{,}01 \rightarrow e_m = T_{obs} = \dfrac{50300 - 50000}{1000/\sqrt{50}} = 2{,}1213$

$t_{49,\,0.01} = 2{,}405$

$t_{obs} < t_{49,\,0.01}$
$\therefore$ NO RECHAZO Ho

No, no es aceptable. No hay evidencia para rechazar $\mu = 50000$

test hip.

0.5

(15) Dos empresas distintas compiten para brindar servicio de internet en cierta región. Denotamos con p a la proporción de pobladores que prefieren a la primera de las empresas por encima de la segunda. Se toma una muestra aleatoria de 50 personas para probar la hipótesis de que la primera empresa tiene conquistada más de la mitad del mercado

a) Considerando que X es la cant. de individuos encuestados que optaron por la primera empresa ¿cuál de las sig. regiones de rechazo le parece más adecuada?

- $H_1: \{x \geq 32\}$ • $H_1: \{x \leq 18\}$ • $H_1: \{x \leq 15 \vee x \geq 45\}$

$m = 50$ $\quad p \geq \frac{32}{50} = 0{,}64 \quad p \leq \frac{18}{50} = 0{,}36 \quad p \leq \frac{15}{50} \vee p \geq \frac{45}{50}$

$p \geq 0{,}64$ a derecha $\quad p \leq 0{,}36$ a izq. $\quad p \leq 0{,}3 \vee p \geq 0{,}9$ bilateral

$H_0: p = 0.50$ vs $H_1: p > 0.5$

$\therefore$ la mejor opción es $H_1: \{x \geq 32\}$ ✓

b) ¿Cuál es la distribución de probabilidad de X siendo cierta $H_0$?

$X \sim Bi(50, 0.5)$ bajo $H_0: p = 0.50$

c) ¿Qué se puede concluir si 12 personas estuvieron a favor de la segunda empresa? ¿Cuál es el p valor de la prueba?

12 a favor de la 2° → 38 a favor de la primera → $\hat{p} = 0{,}76$ $\quad m = 50$

$$e_m = \frac{p - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{m}}} \sim N(0,1) \rightarrow z_{obs} = \frac{\hat{p} - 0{,}5}{\sqrt{\frac{0{,}5 \cdot 0{,}5}{50}}} = \frac{p - 0{,}5}{0{,}5}\sqrt{50}$$

Rechazo $H_0$ si $z_{obs} > z_{1-\alpha}$ → $\hat{p} = 0{,}76$ → $z_{obs} = 3{,}677$

$z_{obs} = 3{,}677$ → $\boxed{p\text{-valor} = 0{,}00012}$ → es muy bajo → $\boxed{\text{Rechazo } H_0}$

d) ¿Cuál es la prob. de cometer error tipo II si $p = 0{,}6$? No dan $\alpha$, tomo $\alpha = 0{,}05$

$$P(\text{error tipo II}) = P(\text{aceptar } H_0 \mid H_0 \text{ es F}) = P(z_{obs} \leq z_{1-\alpha} \mid p = 0{,}6) =$$

$$= P\left(\frac{\hat{p} - 0{,}5}{0{,}5}\sqrt{50} \leq 2{,}575 \mid p = 0{,}6\right) = P\left(\frac{\hat{p} - 0{,}6 + 0{,}10}{0{,}5}\sqrt{50} \leq \overset{0{,}2742}{2{,}575} \mid p = 0{,}6\right) =$$

$$= P(\hat{p} - 0.6 \leq 0{,}1821 \mid p = 0{,}6) = P\left(\underbrace{\frac{\hat{p} - 0.6}{\sqrt{\frac{0.6 \times 0{,}4}{50}}}}_{\sim N(0,1)} \leq \frac{0{,}1821}{\sqrt{\frac{0.6 \times 0{,}4}{50}}}\right) = P(z \leq 0{,}8312) = 0{,}7971$$

0,01939

$$\boxed{P(\text{error tipo II}) \cong 0{,}7971}$$

(16) Una empresa de cosmética afirma que una nueva crema reduce las manchas del cutis tras un uso prolongado (3 meses o más) en más de un 60%. A fin de verificar la veracidad de esta afirmación un centro de belleza que pretende adquirir este producto, utilizará el mismo en 120 manchas de cutis de clientas elegidas al azar. Si se eliminan más de 82 manchas, tomará la decisión de adquirir este nuevo producto.

a) Evaluar el nivel de significación utilizado

Nivel de significación $= \alpha = P(\text{error tipo I}) = P(\text{rechazar Ho con Ho V})$

$n = 120$ $\quad H_0: p = 0.60 \text{ vs } H_1: p > 0.60$

$\hat{p}_{crítico} = \frac{82}{120} = 0{,}68$ $\quad Z_{obs} = \frac{\hat{p} - 0.60}{\sqrt{\frac{0.6 \times 0.4}{120}}} = \frac{\hat{p} - 0.60}{\sqrt{0.24}} \cdot \sqrt{120} \overset{a}{\sim} N(0,1)$ bajo Ho

Rechazo Ho si $Z_{obs} > z_{1-\alpha}$

$$\alpha = P(\text{Rechazar Ho} \mid \text{Ho V}) = P\left(\frac{\hat{p}_{crítico} - 0{,}60}{\sqrt{0{,}24}}\sqrt{120} > z_{1-\alpha}\right) =$$

$$= P\left(\frac{0{,}68 - 0{,}60}{\sqrt{0.24}}\sqrt{120} > z_{1-\alpha}\right) \Longrightarrow P(z_{1-\alpha} < 1{,}788)$$

$$\Longrightarrow 1 - \alpha = 0{,}9631$$

$$\boxed{\alpha = 0{,}037}$$

b) Hallar el error tipo II que se cometería si el producto lograra limpiar el 75% de las manchas

$$\beta = P(\text{error tipo II}) = P(\text{aceptar Ho} \mid \text{Ho F}) = P(Z_{obs} \leq z_{1-\alpha} \mid p = 0{,}75) =$$

$$= P\left(\frac{\hat{p} - 0.60}{\sqrt{0.24}}\sqrt{120} \leq \overset{1{,}86}{1{,}788} \mid p = 0{,}75\right) = P(\hat{p} - 0.60 \leq 0{,}07996 \mid p = 0{,}75) =$$

$$= P(\hat{p} \leq 0{,}6799 \mid p = 0{,}75) = P\left(\underbrace{\frac{\hat{p} - 0{,}75}{\sqrt{\frac{0{,}75 \times 0{,}25}{120}}}}_{\overset{a}{\sim} N(0,1)} \leq \frac{0{,}6799 - 0{,}75}{\sqrt{\frac{0{,}75 \times 0{,}25}{120}}}\right) \simeq$$

$$\simeq P(Z \leq -1{,}7718) \simeq 0{,}03821$$

$$\boxed{\beta \simeq 0{,}03821}$$

(17) Se supone que el 10% de los consumidores de cierta localidad prefiere la marca A de café. Se realizó una campaña publicitaria y después de la misma se entrevistó a 100 habitantes de esta localidad para determinar la efectividad de la campaña. El resultado de esta encuesta mostró que 13 encuestados preferían la marca A.

a) ¿Existe evidencia a nivel aproximado 0,05 de un aumento en la preferencia por la marca A?

$n = 100$ $\qquad H_0: p = 0{,}10 \quad vs \quad H_1: p > 0{,}10$

$\hat{p} = \frac{13}{100} = 0{,}13$ $\qquad Z_{obs} = \frac{\hat{p} - 0{,}10}{\sqrt{\frac{0{,}10 \times 0{,}90}{100}}} = \frac{\hat{p} - 0.10}{0{,}03} \overset{a}{\sim} N(0,1)$ bajo Ho

$\alpha = 0{,}05$

Rechazo Ho si $Z_{obs} > Z_{1-\alpha} \rightarrow \underbrace{\frac{\hat{p} - 0{,}10}{0{,}03} > 1{,}645}_{\text{Zona de rechazo}}$

$Z_{obs} = \frac{0.13 - 0.10}{0{,}03} = 1 \rightarrow Z_{obs} < Z_{1-\alpha} \rightarrow$ No rechazo

$\boxed{\text{No hay evidencia de haberse incrementado el consumo después de la publicidad}}$

b) Calcular el valor p.

$p \text{ valor} = P(Z > Z_{obs}) = P\left(Z > \frac{0{,}13 - 0{,}10}{0{,}03}\right) = P(Z > 1) = 1 - P(Z \leq 1) = 0{,}15866$

$\boxed{p \text{ valor} = 0{,}1586}$

c) ¿Cuál es la prob. aproximada de decidir que la campaña publicitaria no fue efectiva cuando en realidad la proporción de preferencia por la marca A después de la campaña es 0,2?

$P(\text{aceptar Ho} \mid p = 0{,}2) = P(\text{aceptar Ho} \mid \text{Ho F}) = P(\text{error tipo II}) = \beta =$

$= P\left(\frac{\hat{p} - 0{,}10}{0{,}03} \leq 1{,}645 \mid p = 0.2\right) = P(\hat{p} \leq 0{,}14935 \mid p = 0{,}2) = P\left(\underbrace{\frac{\hat{p} - 0{,}2}{\sqrt{\frac{0{,}2 \times 0{,}8}{100}}}}_{\sim Z(0,1)} \leq \frac{0{,}14935 - 0.2}{\sqrt{\frac{0{,}2 \times 0{,}8}{100}}}\right) =$

$\cong P(Z \leq -1{,}26625) = 0{,}1027$ $\qquad \boxed{\beta \cong 0{,}1027}$

d) ¿Qué tamaño muestral le parece apropiado para que la prob. de c) fuese a lo sumo 0,05?

?